Problema 1

Sea n = nº de impares que hay en el conjunto dado
$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2020}\}$$

Si $n \geq 1009$, podemos sumar 1009 de ellos obteniendo una suma impar, lo que contradice el enunciado.

Luego $n < 1009$ y, en particular, en C existen números pares.

Si $n \geq 1$, sea D un conjunto cualquiera de 1009 nº, con al menos un ~~nº~~ nº impar, cuya suma deber ser par.

Si cambiamos ~~uno imp~~ un nº impar de D por otro par de $C \setminus D$, la suma dejará de ser par $\Rightarrow$ contradicción.

Luego $n = 0$.

Problema 5

$$x = (45 + 29\sqrt{2})^{1/3} + (45 - 29\sqrt{2})^{1/3}$$

Sea $a = (45+29\sqrt{2})^{1/3}$ y $b = (45 - 29\sqrt{2})^{1/3}$

Entonces $x^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

con
$$a^3 + b^3 = 90$$
$$ab = (45^2 - 2 \cdot 29^2)^{1/3} = \sqrt[3]{343} = 7$$

Luego $x^3 = 90 + 21x$.

Por Ruffini obtenemos que $x = 6$ es la única solución racional (las otras dos son $-3 \pm 2\sqrt{6}$)